ハノイの塔の問題の一変種

渡　辺　　守・金　子　篤　司*
倉敷芸術科学大学産業科学技術学部
*工学院大学工学部

(1995年9月30日　受理)

1．序

ハノイの塔の問題は解が漸化式から求まる典型的な問題としてよく知られている。また数々の変種が知られており[1]，文部省の学術情報センターのデータバンクには1995年8月時点で95個の論文が登録されている。

オリジナルのハノイの塔の問題は，1883年にフランスの数学者 E. Lucas によって作られた。その問題とは次のようである。3本の柱A，B，Cがある。n枚の大きさの異なる円盤が柱Aに下から上へ大きさの順に大から小へと（以下，この順番を**正順**と呼ぶ。）積まれている。3本の柱を使って円盤を1枚づつ移動させ柱Bに正順に積み上げるための最少手数T_nを求めよ。ただし，このとき，大きい円盤を小さい円盤の上に積んではいけない。関係式 $T_0=0$，$T_n=2T_{n-1}+1$ が成り立つことから，$T_n=2^n-1$ であることはよく知られている。

本論文の目的は次の定理に述べられているような新しい変種を提起し，定理を証明することである。

定　理　1

3本の柱をA，B，Cとする。大きさの異なる緑の円盤n枚が柱Aに，また大きさの異なる赤の円盤n枚が柱Bにそれぞれ正順に積んである。ただし，A，Bの円盤はそれぞれ上からの順番の等しいものは大きさが同じであるとする。

このとき，オリジナルのハノイの塔の問題とは，大きさの等しい円盤はどちらが上にあってもよいことの他は同じ規則に従って，柱Cに2n枚を正順に積むための最少手数X_nは次式で与えられる。

(1)
$$X_n=\begin{cases}\dfrac{10}{3}\times 2^n-\dfrac{3}{2}n-\dfrac{10}{3}\ (n=even\geq 2)\\[2mm] \dfrac{10}{3}\times 2^n-\dfrac{3}{2}n-\dfrac{19}{6}\ (n=odd\geq 1)\end{cases}$$

次の補助定理は２節の定理１の証明に必要である。

補助定理１　(D. Wood[2])

３本の柱A，B，Cがある。柱Aに異なる大きさのk枚の緑の円盤と異なる大きさのk枚の赤の円盤があり，(それぞれ大きいものから順にG_1，G_2，……，G_k，R_1，R_2，……，R_kとし，緑の円盤と赤の円盤は添数がおなじものは大きさが等しいものとする）緑と赤の２枚ずつ（各組において緑，赤のどちらが上にあってもよい）全部で２k個が正順に積んである。このとき，一度に円盤を一枚ずつ移動し，小さい円盤の上に大きい円盤を積んではいけないが，大きさの同じ円盤はどちらが上に積んでもよいものとするとき，柱Aから他の柱Bまたは柱Cへこの２重のハノイの塔を移動するための最少手数A_kは，

(2)　　$$A_k = 2^{k+1} - 2$$

である。

この節の残りで柱に積まれた円盤の状態のベクトル表示の定義を与える。

柱の個数に等しい成分からなる形式的なベクトルを考え，各成分に対応する柱に積まれている円盤の積まれている順序の積を対応させる。仮に柱がA，B，Cの３本あり，柱Aに下から順に円盤D_3，D_6，D_5，D_1，D_2が積まれ，柱Bに下からD_4，D_7が積まれていて，柱Cには円盤が１枚も積まれていない状態には，ベクトル（$D_3D_6D_5D_1D_2$，D_4D_7，ϕ）を対応させる。ただし，ϕは空集合を表す。

さらに，緑，赤２種類の大きさの異なる円盤それぞれn枚ずつを，それぞれ大きいものから順にG_1，G_2，……，G_n，R_1，R_2，……，R_nとし，緑の円盤と赤の円盤は添数がおなじものは大きさが等しいものとする。このとき，ある１つの柱に緑と赤の大きさの等しい２枚組の円盤k組が正順に積まれているときの状態のベクトル表示において，それぞれの２枚組において緑，赤どちらが上にあっても無関係に簡単にM^k表すことにする。

例えば，３本の柱A，B，Cの柱AにはG_1だけ，柱Bには一番下にR_1があり，さらにその上に緑と赤の大きさの等しい２枚組の円盤が全部で２n－２枚積まれていて，柱Cには全く積まれていないとき，この状態に対応するベクトルは（G_1，R_1，M^{n-1}，ϕ）である。

２．定理１の証明

３本の柱A，B，Cがあり，柱Aに異なる大きさのk枚の緑の円盤と柱Bに異なる大きさのk枚の赤の円盤があり（それぞれ大きいものから順にG_1，G_2，……，G_n，R_1，R_2，……，R_nとし，緑の円盤と赤の円盤は添数がおなじものは大きさが等しいものとする）緑と赤の２枚ずつ正順に積んであるとする。

柱Cに２n枚すべてを規則に従って正順に積む最少手数をX_nとする。また，柱Aまたは柱Bに２n枚すべてを規則に従って正順に積む最少手数をY_nとする。このとき，次の関係

式が成立する。

(3) $X_1 = 2,\ Y_1 = 1$

(4) $X_n = Y_{n-1} + 2^{n+1} - 2\ (n \geq 2)$

(5) $Y_n = X_{n-1} + 2^n - 1\ (n \geq 2)$

(6) $X_n + 1 \geq Y_n\ (n \geq 1)$

(3)が成り立つことは明らか。(4), (5), (6)が成り立つことをnに関する帰納法で示す。

$X_2 = 7$, $Y = 5$であることを式(4), (5)を用いることなく直接確かめることは容易である。ところが，これらは$n = 2$を(4), (5)に代入した値にそれぞれ等しいから，(4), (5)は$n = 2$のとき成り立つ。また(3)から$n = 1$のとき(6)が成り立つ。そこで(4), (5), (6)が$n - 1$まで成り立つと仮定する。

まず，(4)がnのとき成り立つことを示す。X_nに関し，最終的に（ϕ, ϕ, M_n）で表される状態に達するには，最大の円盤G_n, R_nのどちらか一方を移動させる直前の状態を必ず経由しなければならない。その状態はG_nとR_n以外のすべての円盤は柱A, B, Cのいずれかに積まれているから，一般性を失うことなく，柱AまたはCに積まれているとしてよいから，次の2つに場合分けされる。

Case 1．（G_n, R_n, M^{n-1}）
Case 2．（G_nM^{n-1}, R_n, ϕ）

Case 1の状態から最終の状態（ϕ, ϕ, M^n）に最少手数で達するには次の手順しかない。すなわち，まず柱BのR_nを柱AのG_nの上に移し，次に柱Cの$2(n-1)$枚すべての円盤を柱Bに移す。さらに，柱Aの2枚G_nとR_nを柱Cに移した後，柱Bの$2(n-1)$枚すべてを柱Cに移すと（ϕ, ϕ, M^n）になる。Woodの補助定理における記号A_nを用いると，

(7) $X_n \geq X_{n-1} + 1 + A_{n-1} + 2 + A_{n-1} = (X_{n-1} + 1) + (2 + 2A_{n-1})$

Case 2の状態から（ϕ, ϕ, M^n）に最少手数で達するには次の手順しかない。すなわち，まず柱BのR_nを柱Cに移し，柱AのR_nを除く$2(n-1)$枚すべての円盤を柱Bに移した後に柱AのR_nを柱Cに移し，さらに柱Bの$2(n-1)$枚すべてを柱Cに移すと（ϕ, ϕ, M^n）になる。Case 2の状態に達する最少手数は定義よりY_{n-1}であるから，従って

(8) $X_n \geq Y_{n-1} + 1 + A_{n-1} = Y_{n-1} + (2 + 2A_{n-1})$

式(7), (8)より，

(9) $X_n \geq min((X_{n-1} + 1) + (2 + 2A_{n-1}),\ Y_{n-1} + (2 + 2A_{n-1}))$

式(7)の帰納法の仮定より，$X_{n-1} + 1 \geq Y_{n-1}$であるから，

(10) $$X_n \geq Y_{n-1}2 + 2A_{n-1}$$

一方，(8)の不等号の右辺の値は Case 1 の状態を経由して（ϕ，ϕ，M^n）に達する最少手数であるから，X_nは(11)の右辺の値で上から押さえられ，従って

(11) $$X_n = Y_{n-1} + 2 + 2A_{n-1}$$

Wood の補助定理によりA_{n-1}の値を代入すると式(4)が得られ，(4)はnのときも成り立つことがわかった。

次に，式(5)が成り立つことを示す。(4)の証明で述べたように，この場合にも，Y_nに関し，最終的に（ϕ，ϕ，M^n）で表される状態に達するには Case 1 または Case 2 の状態を必ず経由しなければならない。

Case 1 を経由するとき，

(12) $$Y_n \geq X_{n-1} + 1 + A_{n-1}$$

Case 2 を経由するとき，

(13) $$Y_n \geq Y_{n-1} + A_{n-1} + 1 + A_{n-1}$$

従って，

(14) $$Y_n \geq min(X_{n-1} + 1 + A_{n-1},\ Y_{n-1} + 1 + 2A_{n-1})$$

ところで，

(15) $$X_k \leq Y_k + A_k \ (k = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

が成り立つ。実際，$k = 1$のときは，$X_1 = 2$，$Y_1 = 1$，$A_1 = 2$であるから成り立ち，また$k \geq 2$のときは，最初の状態として，($G_k G_{k-1} \cdots\cdots G_1$，$R_k R_{k-1} \cdots\cdots R_1$，$\phi$）の（$\phi$，$M^k$，$\phi$)の状態への最少手数が$Y_k$であり，その後引き続き柱Bの$2(k-1)$枚の円盤すべてを柱Cに最少手数で移したときの手数が(16)の右辺の値だからである。

従って，(14)は

(16) $$Y_n \geq X_{n-1} + 1A_{n-1}$$

となる。一方，この不等式において，不等号の向きを逆にしても成り立つ。なぜなら，(16)における右辺は Case 1 の状態を経由して（M^k，ϕ，ϕ）に達する最少手数であるからである。従って，

(17) $$Y_n = X_{n-1} + 1 + A_{n-1}$$

Wood の補助定理より A_{n-1}の値を代入すると式(5)が得られ，(5)は n のときも成り立つ。

次に，不等式(6)が n のときも成り立つことを証明する。

$$\begin{aligned} X_n+1-Y_n &= Y_{n-1}+3+2A_{n-1}-(X_{n-1}+1+A_{n-1}) \quad ((11),\ (17)\text{より}) \\ &= (Y_{n-1}+A_{n-1}-X_{n-1})+2+A_{n-1} \\ &\geq 2+A_{n-1}=2^n>0 \quad ((15)\text{より}) \end{aligned}$$

帰納法の仮定より式(6)は $n-1$ のとき成り立つ。

従って，式(6)は n のときも成り立つ。

さて，(4)と(5)より，

$$X_n=Y_{n-1}+2^{n-1}-2=X_{n-2}+2^{n-1}+2^{n+1}-2 \quad (n\geq 3) \tag{18}$$

この関係式をくり返し使ってXの添数が2だけ小さいXを含む式に次々書き換えていく。

$n=even>3$ のとき，

$$\begin{aligned} X_n &= X_{n-2}+2^{n-1}+2^{n+1}-3=X_{n-4}+(2^{n-1}+2^{n-3}-3)+(2^{n+1}+2^{n-1}-3) \\ &= \cdots\cdots \\ &= X_2+(2^5+2^3-3)+(2^7+2^4-3)+\cdots\cdots+(2^{n+1}+2^{n-1}-3) \end{aligned}$$

$X_2=7$ を代入して整理すると，

$$X_n=\frac{10}{3}\times 2^n-\frac{3}{2}n-\frac{10}{3} \tag{19}$$

一方，$n=2$ を(19)に代入しても $X_2=7$ が得られるので，(20)はすべての $n=\text{even}\geq 2$ に対して成り立つ。

$n=odd>3$ のときも同様に考えて，

$$\begin{aligned} X_n &= X_{n-2}+2^{n-1}+2^{n+1}-3 \\ &= X_3+(2^6+2^4-3)+(2^8+2^6-3)+\cdots\cdots+(2^{n+1}+2^{n-1}-3) \end{aligned}$$

$Y_2=5$ を(4)に代入して $X_3=19$を得る。この値を代入し，整理すると，

$$X_n=\frac{10}{3}\times 2^n-\frac{3}{2}n-\frac{19}{6} \tag{20}$$

一方，$n=3$ を(20)に代入しても $X_3=19$が得られるので，(20)はすべての $n=odd\geq 3$ に対して成り立つ。

よって，定理1が証明された。

文　献

1) Ronald L. Graham, Donald E. Knuth and Oren Patashnik : Concrete Mathematics, Addison-Wesley (1989).

2) Derick Wood : The Towers of Brahma and Hanoi revisited, Journal of Recreational Mathematics, 14 (1981) 17-24.

A Variation of The Towers of Hanoi Problem

Mamoru WATANABE and Atsushi KANEKO*

Dept. of Computer Science and Mathematics,

Kurashiki University of Science and the Arts,

2640 Nishinoura, Tsurajima-cho, Kurashiki-shi, Okayama 712, Japan

**Dept, of Electronic Engineering,*

Kogakuin University,

1-24-2 Nishi-shinjuku, Shinjuku-ku Tokyo 163-9, Japan

(Received September 30, 1995)

A variation of the classical Towers of Hanoi problem is considered in this papers. Let A, Band C be three pegs. Let G_1, G_2, ……, G_n be n different discs colored by green and let R_1, R_2, ……, R_n be n different discs colored by red. Assume for each i diameters of G_i and R_i are the same. The G_i's and the R_i's are initially stacked on peg A and peg B respectively such that the discs are increasing order of diameter from top to bottom. The transformation of discs among pegs follows the following rules : (a) only disc may be moved at one time ; (b) a smaller disc may go only on top of a larger disc, never vice versa (an empty peg accepts any disk), and any two discs of same diameter may be allowed to go on top each other.

If we let X_n denote the minimum number of meves it takes to transfer $2n$ discs from pegs A and B to peg C such that the discs are stacked on peg C inreasing order of diameter from top to bottom. We present the solution :

$$X_n = \begin{cases} \dfrac{10}{3} \times 2^n - \dfrac{3}{2} n - \dfrac{10}{3} & (n = even \geq 2) \\ \dfrac{10}{3} \times 2^n - \dfrac{3}{2} n - \dfrac{19}{6} & (n = odd \geq 1) \end{cases}$$