# ハノイの塔の問題の一変種Ⅱ

渡辺　　守・金子　篤司*

倉敷芸術科学大学産業科学技術学部

*工学院大学工学部

(1996年９月30日　受理)

有名なハノイの塔の問題には数々の変種が知られている（[1]，[2]）。文献［3］においてわれわれは新しい変種を考えた。本論文ではさらに２つの新しい変種を提起し，定理を与える。

**定理１**

３本の柱をA,B,Cとする。大きさの異なる赤の円盤ｎ枚が柱Aに，また大きさの異なる青の円盤ｎ枚が柱Bにそれぞれ下から上へ大きさの順に大から小へと（以下，この順番を正順と呼ぶ）積んである。ただし，A,Bの円盤はそれぞれ上からの順番の等しいものは大きさが同じであるとする。

このとき，オリジナルのハノイの塔の問題とは，大きさの等しい円盤はどちらが上にあってもよいことの他は同じ規則に従って，青の円盤を柱Aに，赤の円盤を柱Bにそれぞれ正順に積むための最少手数$W_n$は次式で与えられる。

$$(1)\quad W_n=\begin{cases}\dfrac{7}{3}\times 2^{n+1}-3n-\dfrac{10}{3} & (n\geq 1:\mathrm{odd})\\ \dfrac{7}{3}\times 2^{n+1}-3n-\dfrac{11}{3} & (n\geq 2:\mathrm{even})\end{cases}$$

**証明**

$n=1,2$のときはそれぞれ$W_1=3$，$W_2=9$であることは容易に確かめられる。$n\geq 3$とする。赤の円盤，青の円盤をそれぞれ大きいものから順に$R_1,R_2,\cdots,R_k,B_1,B_2,\cdots,B_k$とする。最大の円盤が動く直前の状態から動き終えた状態までを，最大の円盤の動きだけに注目し，柱に円盤の積まれている状態の形式的ベクトル表現（[3]を参照）を用いて表すと，

$(R_1,B_1,\phi)\rightarrow(R_1,\phi,B_1)\rightarrow(\phi,R_1,B_1)\rightarrow(B_1,R_1,\phi)$と表される。このとき２番目に大きい円盤が動く直前の状態は一意的に定まる。すなわち，$(R_1R_2,B_1B_2,S)$である。

ただし，Sは［3］の補助定理1から，柱Aのn−2枚と柱Bのn−２枚を$A_{n-2}$回の手数で正順に積んで合成した円盤の集合とする。したがって，最大の円盤の動く直前の状態は$(R_1R_2B_2S^{(1)},B_1,\phi)$と表すことができ，かつ最初の状態からこの状態になるには$X_{n-2}1+A_{n-2}$回の手数が必要である。ただし，$S^{(1)}$はSを柱Cから柱Aにすべて動かして正順に積んだ円盤の集合を

表し，$X_{n-2}$は2（n－2）枚からなるSを合成するのに必要な最少手数である。また，最大の円盤の動く直前の状態から完成までの動きは次のようになる。

$(R_1R_2B_2S^{(1)},B_1,\phi) \to (R_1R_2B_2S^{(1)},\phi,B_1) \to (\phi,R_1,B_1B_2R_1S^{(2)}) \to$
$(B_1,R_1R_2B_1S^{(3)},\phi) \to (B_1B_2,R_1R_2,S^{(4)}) \to (B_1B_2B_3\cdots B_n,R_1R_2R_3,\cdots R_n,\phi)$

ただし，$S^{(2)}$はS$^{(1)}$，$S^{(3)}$はS$^{(2)}$，$S^{(4)}$はS$^{(3)}$をそれぞれ動かして正順に積んだ円盤の集合を表す。各段階での必要な最少手数はそれぞれ$1,A_{n-1}+1,A_{n-1}+1,A_{n-1}+1,X_{n-2}$である。

赤い円盤と青い円盤の2（n－2）枚からなる合成SとS$^{(4)}$は赤い円盤と青い円盤の並んでいる順序が等しい（[3] の補助定理1参照）ことに注意すれば，$(B_1B_2,R_1R_2,S^{(4)})$から完成まではSの合成の逆の操作をすればよい。それぞれの段階での手数は最少手数であることから，最少手数$W_n$は次のように計算できる。

（2）　$W_n=X_{n-2}+1+(A_{n-2}+1)+(A_{n-1}+1)+(A_{n-1}+1)+(A_{n-1}+1)+X_{n-2}$
$\quad =2X_{n-2}+5+2(A_{n-1}+A_{n-2})$

$X_{n-2},A_{n-1},A_{n-2}$の値を [3] の定理1，補助定理1に従って代入すれば所望の結果が得られる。

**定理2**

3本の柱をA,B,Cとする。大きさの異なる赤の円盤n枚が柱Aに，青の円盤n枚が柱Bに，緑の円盤n枚が柱Cにそれぞれ正順に積んである。ただし，A,B,Cの円盤はそれぞれ上からの順番の等しいものは大きさが同じであるとする。このとき，オリジナルのハノイの塔の問題とは，大きさの等しい円盤はどちらが上にあってもよいことの他は同じ規則に従って，柱Cにすべての円盤を正順に積むための最少手数$S_n$は次式で与えられる。

（3）　$S_n=3\times2^{n+1}-4n-6$

**証明**

$S_1=2$であることは明らか。$n\geq2$とする。

柱Aの赤のn－1枚，柱Bの青のn－1枚，柱Cの緑のn－1枚円盤を柱Aに正順に積んで合成した集合をUとする。最初の状態から完成の状態までの動きは次のようになる。

$(R_1R_2\cdots R_n,B_1B_2\cdots B_n,G_1G_2\cdots G_n)\to(R_1U,B_1,G_1)\to(R_1U^{(1)},G_1B_1)\to(\phi,\phi,G_1B_1R_1U^{(2)})$

ただし，$U^{(1)}$はUを，$U^{(2)}$は$U^{(1)}$をそれぞれ動かして正順に積んだ円盤の集合を表す。

各段階での必要な最少手数はそれぞれ$S_{n-1},1+A'_{n-1},1+A'_{n-1}$である。ただし，$A'_n$は [3] の補助定理1において赤と青の2種類の円盤$2_n$枚を，赤と青と緑の三種類の円盤3n枚にした場合の最少手数を表すとする。$A'_n=3\times(2^{n-1}-1)$であることは [3] の補助定理1の証明と同様にして導くことができる。従って，最少手数$S_n$は

（4）　$S_n=S_{n-1}+2+2\times A'_{n-1}=3\times2^{n+1}-4n-6$

となる。

**参考文献**

[1] Derick Wood, The Towers of Brahma and Hanoi revisited, Journal of Recreational Mathematics 14 (1981) 17-24.

[2] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth and OrenOatashnik, Concrete Mathematics (1989), Addison-Wesley.

[3] 渡辺　守，金子篤司：ハノイの塔の問題の一変種，倉敷芸術科学大学紀要,創刊号:65-71 (1996).

# A Variation of The Towers of Hanoi Problem II

Mamoru WATANABE and Atsushi KANEKO*
*Dept. of Computer Science And Mathematics,*
*Kurashiki University of Science and the Arts,*
*2640 Nishinoura, Tsurajima-cho, Kurashiki-shi, Okayama 712, Japan*
**Dept. of Electronic Engineering,*
*Kogakuin University,*
*1-24-2 Nishi-shinjuku, Shinjuku-ku Tokyo 163-9, Japan*
(Received September 30, 1996)

Let A , B and C be three pegs. Let $R_1, R_2, \ldots, R_n$ be $n$ diferent discs colored by red and let $B_1, B_2, \ldots, B_n$ be $n$ diferent discs colored by blue. Assume for each $i$ diameters of $R_i$ and $B_i$ are the same. The $R_i$'s and $B_i$'s are initially stacked

on peg A and peg B respectively such that the discs are increasing order of diameter from top to bottom. The transformation of discs among pegs follows the following rules: (a) only disc may be moved at one time; (b) a smaller disc may go only on top of a large disc, never vice versa (an empty peg accepts any disk), and any two discs of same diameter may by allowed to go on top each other. If we let $W_n$ denote the minimum number of moves it takes to transfer

$n$ red discs from peg A to peg B and $n$ blue discs from peg B to peg A such that the discs are stacked on peg A or peg B increasing order of diameter from top to bottom. We have

(1) $$W_n = \begin{cases} \frac{7}{3} \times 2^{n+1} - 3n - \frac{10}{3} & (n \geq 1 : \text{odd}) \\ \frac{7}{3} \times 2^{n+1} - 3n - \frac{11}{3} & (n \geq 2 : \text{even}) \end{cases}$$

Moreover we deal with a vertion that each of three pegs initially stacked $n$ discs colored by one of three colors (red , blue and green) and ask the minimum number $S_n$ of moves it takes to transfer all discs to peg C. We have

(2) $$S_n = 3 \times 2^{n+1} - 4n - 6.$$