

# Binomial ideal の計算

中川 重和・土橋 弘尚\*

倉敷芸術科学大学産業科学技術学部

\* 倉敷芸術科学大学大学院産業科学技術研究科

(1999 年 9 月 30 日 受理)

## 1 はじめに

統計学における分割表上の Markov Chain Monte Carlo 法 (MCMC) ならびに分割表の数え上げは、数式処理の研究対象である binomial ideal を用いると、同じ枠組みで議論することができる ([3], [5]). さらに、整数計画問題 ([6]) も同様であり、binomial ideal を効率よく計算する方法が重要である。

binomial ideal とは、体  $k$  上の  $n$  変数多項式環  $k[x] := k[x_1, \dots, x_n]$  において、binomial

$$ax^\alpha + bx^\beta \quad (a, b \in k, \alpha, \beta \in N^n) \quad (1)$$

によって生成される ideal をいう。

binomial ideal の計算は、Gröbner basis 理論の教科書 (例えば, [2]) にある方法、つまり、多項式写像の核を Gröbner basis を用いて計算することで原理的には可能である。しかしながら、この方法は、補助変数が必要になることより (Gröbner basis 計算が変数の増大に対して敏感なため)、少しサイズの大きい問題には不適となる。補助変数を導入しない新しいアルゴリズムが [4] により提案されており、少なからずの改良がなされている。

本稿では、両者のアルゴリズムの国産数式処理システム Asir [1] 上への実装とその実行結果について報告する。まず、第 2 節で分割表上の MCMC について言及する。第 3 節、第 4 節にて、binomial ideal 計算アルゴリズムの実装ならびにその実行結果を述べる。

## 2 分割表上の酔歩構成問題

### 2.1 $I \times J$ 分割表の場合

分割表に対する Markov Chain Monte Carlo 法 (MCMC) は、 $\chi^2$  近似による独立性検定においてその近似がよくない場合 (例えば、各セルの個数が 5 以下であるような場合や Fisher の正確確率法が適用できない場合など) にも有効であるという意味で、頑健である。

行和  $r = (r_1, r_2, \dots, r_I)$  と列和  $c = (c_1, c_2, \dots, c_J)$  が与えられた  $I \times J$  分割表全体の集合を  $\Omega(r, c)$  とする ( $N = \sum_{i=1}^I r_i = \sum_{j=1}^J c_j$ ) :

$$\Omega(r, c) = \{u \mid u = (u_{ij}) \text{ is } I \times J, u_{i.} = r_i, u_{.j} = c_j, u_{ij} \in N_0\}.$$

---

\*大学院生

ここで,  $u_i = \sum_{j=1}^J u_{ij}$ ,  $u_j = \sum_{i=1}^I u_{ij}$  である.

$\Omega(r, c)$  上の確率変数  $X$  が超幾何分布

$$\Pr(X = u = \{u_{ij}\}) = \frac{\prod_i r_i! \prod_j c_j!}{N! \prod_{i,j} u_{ij}!}$$

に従うことを利用すると,  $\Omega(r, c)$  上の Markov chain は, 以下のように構成できる. 異なる 2 行と異なる 2 列をランダムに選び, それらからなる 4 つの要素において,

$$\begin{array}{cc} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{array}$$

とする移動の仕方全体 ( $s := \binom{I}{2} \binom{J}{2}$  通り) を考え, これらを  $M := \{m_1, m_2, \dots, m_s\}$  とする. つまり  $1 \leq i < k \leq I$ ,  $1 \leq j < l \leq J$  に対して,  $m = (m_{ab}) \in M$  は

$$m_{ab} = \begin{cases} -1 & (a=i, b=j) \\ 1 & (a=i, b=l) \\ 1 & (a=k, b=j) \\ -1 & (a=k, b=l) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (2)$$

である. ある初期値  $u \in \Omega(r, c)$  に対して,  $u' = u + \epsilon \cdot m_i$  とする. ただし,  $\epsilon$  を確率 1/2 で選び,  $m_i$  も  $M$  のなかからランダムに選ぶものとする. その結果  $u'$  において, 負の要素を含むときは  $u$  にとどまる. そうでなければ,  $u'$  に移動する.  $u'$  を改めて  $u$  とし, この操作を繰り返す. ここで,  $u'$  は 4 つの要素において  $\pm 1$  されるだけなので,  $u' \in \Omega(r, c)$  である. このようにしてできる Markov chain は connected である.

[3] において, (2) のような移動の全体  $M$  が connected を与えることが Gröbner basis を用いて示されている. しかしながら, この Markov chain が reversible とは限らない.

以下に述べる Metropolis 法によると, reversible となり, 定常分布をもつ Markov chain が構成できる:

1.  $s := \binom{I}{2} \binom{J}{2}$ ;  $j := 0$ ;
2.  $u \in \Omega(r, c)$  を選ぶ;
3. **while** ( $j < REPEAT$ ) {
  - 3.1 確率 1/2 で  $\epsilon = \pm 1$  を決定;
  - 3.2  $i := 0 \sim s$  の一様乱数;
  - 3.3  $u + \epsilon \cdot m_i$  において, 要素が負になるかどうかの判定;  
もしそうならば, ステップ 3.7 へ;
  - 3.4  $r := \frac{\Pr(X = u + \epsilon \cdot m_i)}{\Pr(X = u)}$ ; % Metropolis' trick.
  - 3.5  $h := 0 \sim 1$  の一様乱数;
  - 3.6 **if** ( $r \geq 1$ ) **then**  $u := u + \epsilon \cdot m_i$ ;  
      **else if** ( $r \geq h$ ) **then**  $u := u + \epsilon \cdot m_i$ ;
  - 3.7  $u$  の  $\chi^2$  値を計算;
  - 3.8  $j := j + 1$ ;

ここで,  $REPEAT$  は定常分布に到達したとみなせるだけ選ぶ<sup>1</sup>(通常は  $10^6$  回).

<sup>1</sup>収束性の評価は, 議論の余地があり, 今後の課題である.

例 2.1 行和  $(1, 1, 2)$  および 列和  $(1, 1, 2)$  となる  $3 \times 3$  分割表全体を考える：

$$\Omega((1, 1, 2), (1, 1, 2)) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \right. \\ \left. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

これらを順に,  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$  とする. また, このときの  $M$  は,

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} - & + & 0 \\ + & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} - & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ + & - & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} - & 0 & + \\ + & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} - & 0 & + \\ 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & - \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ - & + & 0 \\ + & - & 0 \end{bmatrix}, \right. \\ \left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & + \\ + & 0 & - \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & - & + \\ 0 & + & - \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & - & + \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & - \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & + \\ 0 & + & - \end{bmatrix} \right\}.$$

図 1 は,  $\Omega((1, 1, 2), (1, 1, 2))$  に付随する無向グラフである. 辺は,  $u_j$  と  $u_k$  がある  $m_i$  によって  $u_j = u_k + \epsilon \cdot m_i$  のとき結ぶこととしている. Markov chain が connected とは,  $\Omega(r, c)$  に付随する無向グラフにおいて, 図 1 のように各頂点からのサーキットが存在することである.

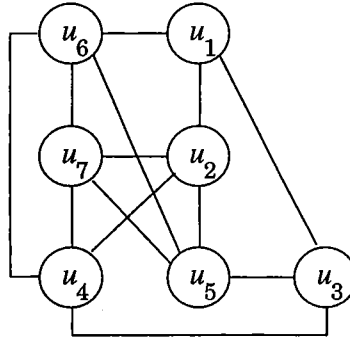


図 1:  $\Omega((1, 1, 2), (1, 1, 2))$  に付随する無向グラフ

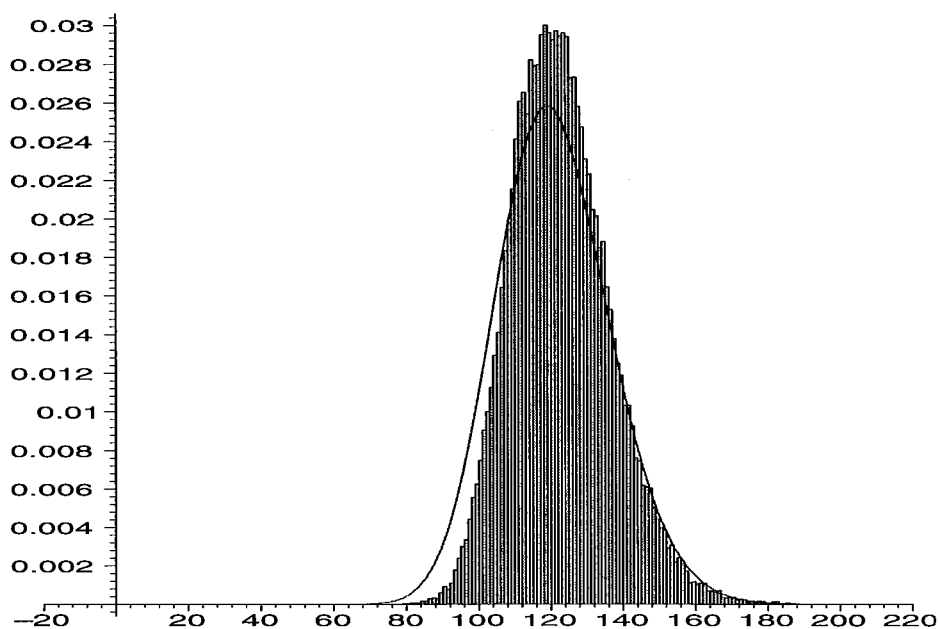
例 2.2 表 1 は Queen Victoria の子孫 82 人の誕生日と死亡月についてまとめた表である. 昔から, 「誕生日と死亡月には関連あり」と言われていた.  $\chi^2$  検定を実施すると,

$$\chi^2 = 115.6 < 147.7 = \chi^2_{0.05}(121)$$

より, 関連性があるとはいえない. 図 2 は, 自由度 121 の  $\chi^2$  分布の密度関数 (曲線) と MCMC による密度関数 (棒グラフ) を描いたものである. この例は, 各セルの個数が 5 以下であり,  $\chi^2$  近似がよくない場合の例である. 80 から 100 付近でずれがある.

表 1: Queen Victoria の子孫 82 人の誕生月と死亡月

死亡月	誕生月												計
	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月	
1月	1	0	0	0	1	2	0	0	1	0	1	0	6
2月	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	2	5
3月	1	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	1	5
4月	3	0	2	0	0	0	1	0	1	3	1	1	12
5月	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	12
6月	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3
7月	2	0	2	1	0	0	0	0	1	1	1	2	10
8月	0	0	0	3	0	0	1	0	0	1	0	2	7
9月	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	3
10月	1	1	0	2	0	0	1	0	0	1	1	0	7
11月	0	1	1	1	2	0	0	2	0	1	1	0	9
12月	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3
計	13	4	7	10	8	4	5	3	4	9	7	8	82

図 2: p.d.f of  $\chi^2(121)$  vs. p.d.f. of MCMC( $10^6$ )

## 2.2 $I \times J \times K$ 分割表の場合

第 2.1 節の議論は 3 元分割表にも容易に拡張できる。  $I \times J$  分割表の場合、ひとつめの鍵は周辺和が不変であることであり、これは本質的に十分統計量が与えられたもとでの条件付き推測を意味する。

ふたつめの鍵は、Markov chain が connected となるような移動の全体を見つけることである。このような移動の全体を Markov basis と呼ぶ：

**定義 2.1**  $Z^I, Z^J$  の標準基底をそれぞれ  $\{e_i\}, \{e'_j\}$  として、線形写像

$$\begin{aligned} \pi: N^{IJ} &\rightarrow Z^I \oplus Z^J \\ u_{ij} &\mapsto \sum_{i,j} u_{ij} e_i \oplus e'_j \end{aligned} \quad (3)$$

を定めるとき、 $\Omega(r, c) = \{u \in N^{IJ} \mid \pi(u) = \begin{bmatrix} r \\ c \end{bmatrix}\}$  である。  $\pi$  の定義域を  $Z^{IJ}$  に拡張して  $\ker(\pi) \subset Z^{IJ}$  を考えるとき (今後、 $\ker(\pi) \subset Z^{IJ}$  とする)、 $\ker(\pi)$  の任意の元は周辺和を不変にする。したがって、 $\ker(\pi)$  の基底が  $\Omega(r, c)$  上のひとつの Markov basis を与える。ここで、 $\{m_1, \dots, m_L\} \subset \ker(\pi)$  が Markov basis であるとは、すべての  $u, u' \in \Omega(r, c)$  に対して、 $(\epsilon_1, m_{i_1}), \dots, (\epsilon_A, m_{i_A})$  が存在して (ただし、 $\epsilon_i = \pm 1$ )、

$$u' = u + \sum_{j=1}^A \epsilon_j m_{i_j} \quad \text{および} \quad u + \sum_{j=1}^a \epsilon_j m_{i_j} \geq 0 \quad (1 \leq a \leq A)$$

をみたすことである。

**例 2.3**  $I \times J$  分割表のとき、(2) で与えられる  $M$  が Markov basis である。

さて、 $I \times J \times K$  分割表における 3 次交互作用なしモデル：

$$\frac{p_{111} p_{ij1}}{p_{111} p_{1j1}} = \frac{p_{11k} p_{ijk}}{p_{11k} p_{1jk}} \quad 2 \leq i \leq I, 2 \leq j \leq J, 2 \leq k \leq K$$

を考える。このモデルの十分統計量は line sums

$$u_{jk}, u_{ik}, u_{ij}.$$

である。  $I \times J \times K$  分割表の場合にも同様に Markov basis を定義する。

**定義 2.2** 行列空間  $Z^{IJ}, Z^{IK}, Z^{JK}$  の標準基底をそれぞれ、 $\{e_{ij}\}, \{e'_{ik}\}, \{e''_{jk}\}$  として、線形写像

$$\begin{aligned} \Phi: N^{IJK} &\rightarrow Z^{IJ} \oplus Z^{IK} \oplus Z^{JK} \\ u_{ijk} &\mapsto \sum_{i,j,k} u_{ijk} e_{ij} \oplus e'_{ik} \oplus e''_{jk} \end{aligned} \quad (4)$$

を定めるとき、 $\Omega(r, c, h) = \{u \in N^{IJK} \mid \Phi(u) = \begin{bmatrix} r & c & h \end{bmatrix}'\}$  である。  $\Phi$  の定義域を  $Z^{IJK}$  に拡張して  $\ker(\Phi) \subset Z^{IJK}$  を考えるとき (今後、 $\ker(\Phi) \subset Z^{IJK}$  とする)、 $\ker(\Phi)$  の任意の元は line sums を不変にする。したがって、 $\ker(\Phi)$  の基底が  $\Omega(r, c, h)$  上のひとつの Markov basis を与える。  $\{m_1, \dots, m_L\} \subset \ker(\pi)$  が Markov basis であるとは、すべての  $u, u' \in \Omega(r, c, h)$  に対して、 $(\epsilon_1, m_{i_1}), \dots, (\epsilon_A, m_{i_A})$  が存在して (ただし、 $\epsilon_i = \pm 1$ )、

$$u' = u + \sum_{j=1}^A \epsilon_j m_{i_j} \quad \text{および} \quad u + \sum_{j=1}^a \epsilon_j m_{i_j} \geq 0 \quad (1 \leq a \leq A)$$

をみたすことである。

このとき、第3節で述べる方法により  $3 \times 3 \times 3$  分割表 (3 次交互作用なしモデル) の Markov basis は表2のように与えられる。そして、第2節の議論とはほぼ並行して connected な Markov chain が構成できる。

表 2:  $3 \times 3 \times 3$  分割表の Markov basis

-	+	0	+	-	0	0	0	0			
+	-	0	-	+	0	0	0	0	27 個	4 次	
0	0	0	0	0	0	0	0	0			
+	-	0	-	+	0	0	0	0			
-	0	+	+	0	-	0	0	0	18 個	6 次	
0	+	-	0	-	+	0	0	0			
+	-	0	-	0	+	0	+	-			
-	+	0	+	0	-	0	-	+	36 個	6 次	
0	0	0	0	0	0	0	0	0			
-	+	0	+	0	-	0	-	+			
+	0	-	-	0	+	0	0	0	28 個	7 次	
0	-	+	0	0	0	0	+	-			
+	-	0	-	0	+	0	+	-			
-	0	+	0	0	0	+	0	-	1 個	9 次	
0	+	-	+	0	-	-	-	+2			

例 2.4 表3は宗教 (Northern Protestant, Southern Protestant, Catholic), 教育 (Low は 9 年未満の教育を受けた者, Midium は 9 年以上 12 年未満, High は 12 年以上) のちがいに よる人工流産への態度 (Positive, Mixed, Negative) をまとめた  $3 \times 3 \times 3$  分割表である。

表 3: 宗教, 教育のちがいによる人工流産への態度 (1972, アメリカ)

	Northern Protestant			Southern Protestant			Catholic		
	P	M	N	P	M	N	P	M	N
L	9	16	41	8	8	46	11	14	38
M	85	52	105	35	29	54	47	35	115
H	77	30	38	37	15	22	25	21	42

IPFP によるセルの最尤推定値は

12.01	14.43	39.58	9.44	12.25	40.27	6.55	11.32	45.13
85.75	52.51	103.8	36.55	24.17	57.27	44.68	39.32	113.0
73.24	31.06	40.66	34.01	15.58	24.45	31.77	19.36	36.87

となり,

$$\chi^2 = 13.37 < 15.507 = \chi_{0.05}^2(8)$$

を得る. よって, 3 次交互作用なしモデルにフィットしている.

図 3 は, 自由度 8 の  $\chi^2$  分布の密度関数 (曲線) と MCMC による密度関数 (棒グラフ) を描いたものである.

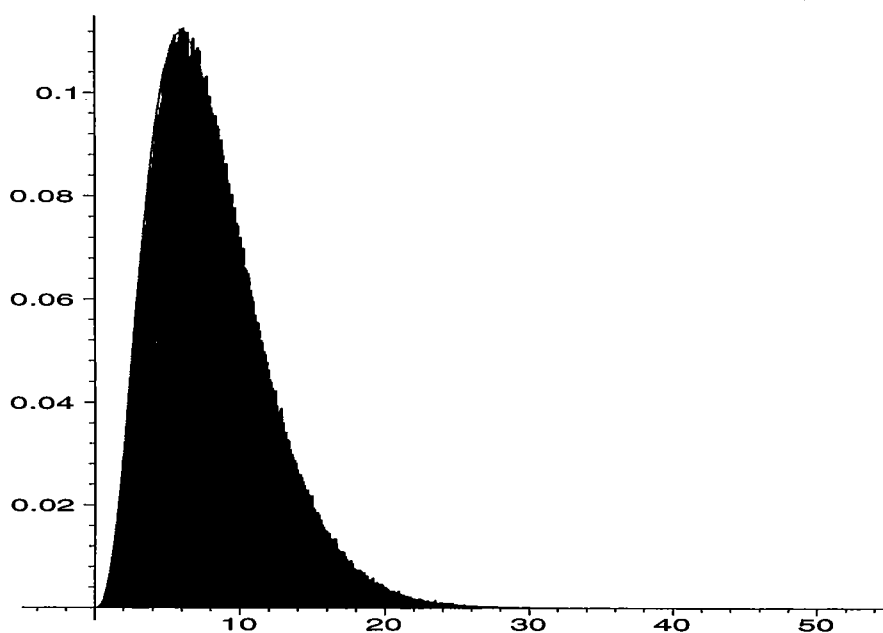


図 3: p.d.f of  $\chi^2(8)$  vs. p.d.f. of MCMC( $10^6$ )

### 3 binomial ideal 計算アルゴリズム

Gröbner basis は, おおざっぱにいうと, 多変数多項式環のイデアルの生成元のうち「ある性質」をもつ生成元のことをいう. 体  $k$  上の  $n$  変数多項式環  $k[x] = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$  において, 単項間  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$  に項順序  $\succ$  を定義する. 例えば  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の辞書式順序は項順序である.  $f \in k[x]$  に含まれる単項のうち,  $\succ$  に関して最高の単項を  $\text{in}_\succ(f)$  と書く.  $k[x]$  のイデアル  $I$  が与えられたとき,  $I$  の生成系  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_s\} \subset I$  が  $I$  の Gröbner basis であるとは,  $\langle \text{in}_\succ(f) \mid f \in I \rangle = \langle \text{in}_\succ(g_1), \text{in}_\succ(g_2), \dots, \text{in}_\succ(g_s) \rangle$  のことをい

う. 任意のイデアルに対して Gröbner basis は一意に決まらないが, 正則条件のもとでは一意である. このような Gröbner basis を特に reduced Gröbner basis という. なお, ほとんどの数式処理システムはこの reduced Gröbner basis の計算をサポートしている.

我々の問題へ Gröbner basis の理論を持ち込むために, (3) で与えた線形写像を多項式写像へと持ち上げる:

$$\begin{aligned}\hat{\pi}: k[u] &\rightarrow k[t] \\ u_{ij} &\mapsto t^{e_i \oplus e'_j}.\end{aligned}\quad (5)$$

ただし,  $u = (u_{11}, u_{12}, \dots, u_{IJ})$  であり,  $t = (t_1, t_2, \dots, t_{I+J})$  である. このとき,

$$\langle u_{ij} - t^{e_i \oplus e'_j} \rangle \quad (6)$$

は  $IJ + I + J$  個の変数  $u, t$  からなる多項式環  $k[u, t]$  のイデアルであり,  $\ker(\hat{\pi})$  は  $k[u]$  のイデアルである. なお, (6) は binomial ideal である.

例 3.1  $I = J = 3$  のとき,

$$\begin{aligned}\hat{\pi}: k[u_{11}, \dots, u_{33}] &\rightarrow k[t_1, \dots, t_6] \\ u_{ij} &\mapsto t^{e_i \oplus e'_j}\end{aligned}$$

において,  $\ker(\hat{\pi})$  は, binomial ideal

$$\begin{aligned}\langle &u_{11} - t_1 t_4, u_{12} - t_1 t_5, u_{13} - t_1 t_6, \\ &u_{21} - t_2 t_4, u_{22} - t_2 t_5, u_{23} - t_2 t_6, \\ &u_{31} - t_3 t_4, u_{32} - t_3 t_5, u_{33} - t_3 t_6 \rangle\end{aligned}$$

に等しい.

$\ker(\hat{\pi})$  と Markov basis の関係は次の命題で与えられる:

**命題 3.1 ([3])**  $\{m_1, \dots, m_L\}$  が  $\Omega(r, c)$  上の Markov basis であるための必要十分条件は,  $\{t^{m_i^+} - t^{m_i^-} \mid 1 \leq i \leq L\}$  が  $\ker(\hat{\pi})$  の生成元であることである. ここで,  $m_i^+, m_i^-$  はともに非負の要素からなり,  $m_i = m_i^+ - m_i^-$  となる.

命題 3.1 から, Markov basis を求めることは (5) で定まる写像の核  $\ker(\hat{\pi})$  の生成元を求める問題に帰着される. この問題の解法は Gröbner basis 理論では既知の事実であり, 以下のように Markov basis を求めるアルゴリズムが構成できる.

Markov basis を求めるアルゴリズム ([2])

- $\langle u_{ij} - t^{e_i \oplus e'_j} \rangle (\subset k[u, t])$  の reduced Gröbner basis (with elimination order  $t \succ u$ )  $G$  を求めよ.
- $G' := G \cap k[u]$  が  $I$  の ( $k[u]$  における) Gröbner basis i.e.  $I = \langle G' \rangle$ .  $G'$  が求める Markov basis である.

$\ker(\hat{\pi})$  の reduced Gröbner basis は,

$$\{u_{i\ell} u_{kj} - u_{ij} u_{k\ell} \mid 1 \leq i < k \leq I, 1 \leq j < \ell \leq J\}$$



であり, これは (2) 全体である. ここで,  $u_{il}$  および  $u_{kj}$  には  $+1$  を,  $u_{ij}$  および  $u_{kl}$  には  $-1$  と対応させる.

$I \times J \times K$  分割表の場合も同様である. 線形写像  $\Phi$  を多項式写像  $\hat{\Phi}$  へと持ち上げる:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}: k[u] &\rightarrow k[t] \\ u_{ijk} &\mapsto t^{e_{ij} \oplus e'_{ik} \oplus e''_{jk}}.\end{aligned}$$

ただし,  $u = (u_{111}, \dots, u_{IJK}), t = (x_{11}, \dots, x_{IJ}, y_{11}, \dots, y_{IK}, z_{11}, \dots, z_{JK})$  である. なお,  $\ker(\hat{\Phi})$  は  $IJK$  個の変数  $u$  からなる体  $k$  上の多項式環  $k[u]$  のイデアルである.

$\ker(\hat{\Phi})$  と Markov basis の関係は次の命題で与えられる:

**命題 3.2 ([3])**  $\{m_1, \dots, m_L\}$  が  $\Omega(r, c, h)$  上の Markov basis であるための必要十分条件は,  $\{t^{m_i^+} - t^{m_i^-} \mid 1 \leq i \leq L\}$  が  $\ker(\hat{\Phi})$  の生成元であることである. ここで,  $m_i^+, m_i^-$  はともに非負の要素からなり,  $m_i = m_i^+ - m_i^-$  となる.

命題 3.2 から, 先程と同様に実行できるが, このままでは変数の個数が少し増大すると計算が破綻する. そこで, 一つの改良策として以下に述べる [4] の方法により, Markov basis を以下の事実に基づき計算する:

**事実 1**  $u = (u_{111}, \dots, u_{IJK})$  を改めて  $(u_1, \dots, u_n)$  とする.  $\ker(\Phi)$  を張る部分集合  $C \subset \ker(\Phi)$  に対して,  $J_C = \langle u^{v^+} - u^{v^-} \mid v \in C \rangle$  とおくと,

$$\ker(\hat{\Phi}) = (J_C : (u_1 \cdots u_n)^\infty)$$

である. なお,  $(J_C : (u_1 \cdots u_n)^\infty) = \{g \mid (u_1 \cdots u_n)^r g \in J_C \text{ for some } r \in \mathbb{N}\}$  である.

**事実 2**  $\ker(\hat{\Phi}) = ((\cdots((J_C : u_1^\infty) : u_2^\infty) \cdots) : u_n^\infty)$  が成立する.

**事実 3** 項順序を  $\text{drl}$  with  $u_1 > \cdots > u_n$  とし,  $\mathcal{G}$  を reduced Gröbner basis of  $J \subset k[u]$  とする. このとき,  $\mathcal{G}' = \{f \in \mathcal{G} \mid u_n \nmid f\} \cup \{f/u_n^q \mid f \in \mathcal{G} \text{ and } u_n^q \mid f\}$  とおくと,  $\mathcal{G}'$  は  $(J : u_n^\infty)$  の Gröbner basis である.

事実 3 を事実 1, 2 に対して再帰的に適用すると, 所望の結果が得られる.

$I = J = K = 3$  のとき, Markov basis は表 2 のようになる. 合計 110 個からなり, 5 つのパターンに分類できる. Gröbner basis の元で次数がそれぞれ 4, 6, 6, 7, 9 次の多項式に対応している.

## 4 実行結果

サイズが  $I \times J \times K$  である 3 元分割表における酔歩構成問題を考える.  $I, J, K$  の値に対して, 表 1 左に示す個数からなる (1) の形の式の Gröbner basis を計算しなければならない. 表 1 右は, DEC Alpha station (500MHz, 1024MB) 上でのそれぞれの実行結果である. なお, asir の起動時のオプションは, `asir -adj 16 -heap 32, gbcheck` なしである.

表 4:  $I \times J \times K$  分割表の 2 項イデアル計算の時間

$I$	$J$	$K$	[2] の方法		[4] の方法		[2] の方法	[4] の方法
			式	変数	式	変数	CPU(sec)	CPU(sec)
2	2	3	12	26	2	12	1.1	0.2
2	3	3	18	39	4	18	55.1	0.2
2	3	4	24	50	6	24	1353.6	5.6
2	3	5	30	61	8	30	19666.3	9.9
2	4	4	32	64	9	32		408.9
2	4	5	40	78	12	40		4days
3	3	3	27	54	8	27		4953.0

## 参考文献

- [1] 野呂正行, 下山武司 (1995). *Asir User's Manual*. <ftp://endeavor.fujitsu.co.jp>.
- [2] Adams, W.W. and Loustanaun, P.(1994). *An Introduction to Gröbner bases*. AMS.
- [3] Diaconis, P. and Strumfels, B.(1998). Algebraic algorithms for sampling from conditional distributions. *Ann. Statist.*, **26**, 363–397.
- [4] Hosten, S. and Strumfels, B.(1995). GRIN: An Implimentation of Gröbner Bases for Integer Programming. Springer LNCS, **920**, 267–276.
- [5] Strumfels, B.(1996). *Gröbner bases and convex polytopes*. AMS.
- [6] Thomas, R. R.(1995). A geometric Buchberger algorithm for integer programming. *Mathematics of operations research* **20**, No. 4, 864–884.

## Computing binomial ideals

Shigekazu NAKAGAWA and Koushou TSUCHIHASHI\*

*Department of Computer Science and Mathematics,**\*Graduate School of Science and Industrial Technology,**Kurashiki University of Science and the Arts,**Nishinoura, Tsurajima-cho, Kurashiki, Okayama, 712-8505, Japan**(Received September 30, 1999)*

There is a problem of computing ideals which consist of binomials. We call them binomial ideals. Binomial ideals are arising from several branches of mathematics, such as Markov Chain Monte Carlo method for contingency tables, enumeration of contingency tables and integer programming. In this paper, we realize the efficient algorithms on computer algebra system Asir. Related topics, especially Markov Chain Monte Carlo method for contingency tables, are surveyed.

---

\*Graduate School Student