On a valid path in a rectangle partitioned into horizontally aligned rectangle boxes

中川　重和・渡辺　守
倉敷芸術科学大学産業科学技術学部

(1997年9月30日　受理)

1　序

与えられた長方形を2本以上のいくつかの平行線で仕切り，さらに仕切られた各々の小長方形をさらに任意にいくつかの小長方形（以下，**box** と呼ぶ）に仕切ることで得られる図形について考察する。文献［1］において，V. Halava 等は，この図形の最上段のすべての box に＋の符号を，最下段のすべての box に－の符号を与え，それら以外のすべての box に＋または－の符号を任意に与えたとき，G の左右の端を結ぶ path で各辺の左右の box の符号が異なっている path（後で valid path と呼ぶ）が存在することを示した。この結果は［2］における J. Isbell の Zigzag の定理としてよく知られる結果を拡張したものである。彼等は valid path を見つける有効なアルゴリズムも与えている。

本論文において，われわれは V. Halava 等の結果の一般化について論議する。2節において，最上段から最下段までの各 box の符号が任意に与えられているとき，G が左右の端を結ぶ valid path をもつための必要十分条件を与える。さらに valid path を見つける再帰的なアルゴリズムを3節で与える。

定義1．1　長方形 R がある。左右の辺をそれぞれ，L 岸，R 岸と呼び，上下の辺をそれぞれ，T 岸，B 岸と呼ぶことにする。R は最初に水平線分によって，$p(p \geq 2)$ 個の小長方形 $R_1, R_2, \ldots, R_p$ に分割される。次に，各 $R_i(1 \leq i \leq p)$ は垂直線分によって，$n_i(n_i \geq 1)$ 個の box $b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in_i}$ に分割される。

さらに，各 box に符号（＋あるいは－のいずれか）を任意に割り当てる。つまり，box 全体の集合から $\{+,-\}$ への関数

$$\sigma : \{b_{ij} | 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n_i\} \to \{+,-\}$$

を与える。R をこのような box で分割し，さらに符号をも合せた図形を G で表わす（図1参照）。なお，4個の隣接する box 同士が1つの頂点を共有してもよいものとする。

定義1．2　G の各 box は4つの辺と頂点をもっている。もし，b_{ij} と b_{rs} が隣接している，す

なわち b_{ij} と b_{rs} が共通の辺をもち，さらに $\sigma(b_{ij}) \neq \sigma(b_{rs})$ が成り立つとき，そのような共通線分を **valid segment** という。

定義１．３　G 内の path とは，box の辺あるいは辺の一部から成る（連続した）線分のリストをいう。G 内の path が **valid** であるとは，構成する線分がすべて valid segment であるときをいう。G 内の path が simple であるとは，自分自身と交わらないときをいう。G 内の path が $L-R$ **path** であるとは，L 岸から始まり，R 岸で終わるときをいう。

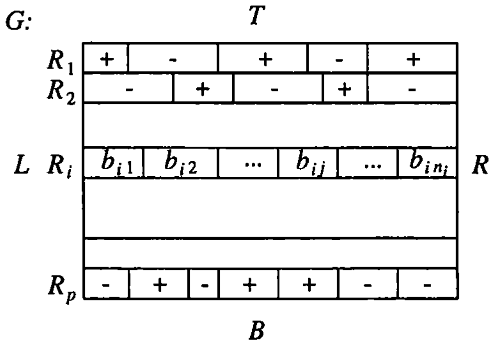

図１　$G:R$ の box による分割

例１．１　図２において，太い線分はすべての valid segment を示す。

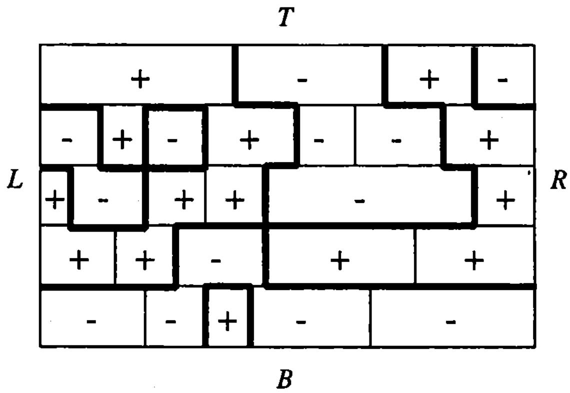

図２　valid segments

2　特徴付け

定義２．１　G において，box の列 $\{B_1,...,B_m\}$ が以下の条件を満足するとき，$T-B$ 短冊であるという。

1．box B_1 と B_m はそれぞれ T 岸，B 岸を辺に持つ。
2．box B_i と $B_{i+1}(1 \leq i < m)$ は辺の一部を共有する。

定義２．２　G の各 box の頂点のうち，もとの R の頂点を除いた全体を **cross** と呼ぶ。cross は，それに隣接する box の個数により，２個の box の共通な頂点（T 岸，B 岸，L 岸，R 岸のいずれかにある），３個の box の共通な頂点，４個の box の共通な頂点の大きく３種類に類別される。また，各種類の頂点に隣接する box の組には，それぞれ４，８，16通りの符号の割り当て方がある。

４個の符号付きの box の共通な頂点となる cross のうち，図３に示される２つのタイプを特に **bad cross** という。また，bad cross でない cross を **regular cross** という。

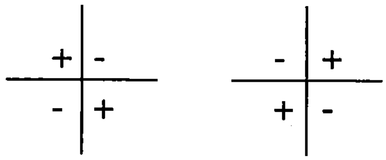

図３　bad cross

$L-R$ valid path の存在性の $T-B$ 短冊による特徴付けを与える定理の証明のため，次の補題を必要とする。

補題２．１　G に $L-R$ valid path が存在しないと仮定する。このとき，G の valid な辺全体で生成されるグラフ H の成分の中で最も下にある cross のうち最も右にあるものを x とすれば，x を左下の cross とする box から始まり T 岸へ至る同符号の box からなる短冊が存在する。

次の事実は補題２．１の証明に用いられる。

注意２．１　box B が第 p 段にないとする。H の成分の中で x は最も下にある cross のうち最も右にあるものとし，x を含む成分を K とする。このとき，B を右下の頂点とする box とし，$\sigma(B)=+$ とするとき，成分 K は x を通り B の右辺下またはその一部と B の上辺またはその一部を通ることは容易に確かめられる。

補題２．１の証明

p に関する帰納法で証明する。$p=2$ のときは明らかであるから，$p\geq 3$ とし，p より少ない段数をもつすべての G に対して命題が成立すると仮定する。H の成分の中で最も下にある cross のうち最も右にあるものを x とするとき，x を右下の頂点にもつ box を B とし，B は q 段目にあるとする。すると，$q\leq p-1$。

Case 1．$q=p-1$.B より左にある p 段目の＋の符号をもつすべての box の符号を－に換えることにより得られるグラフを G' とおき，G' に帰納法の仮定を適用する。G' の H の成分の中で最下段に現れる最も右の cross を x' とするとき，x' を右下の頂点とする符号が－の box がある。それを B' とおくと，帰納法の仮定より，B' に始まり T 岸に至る－の符号の box からなる

短冊 C が存在する。一方，注意２．１を考慮することにより，G' の最下段の x' より右にあるすべての box の符号は－であるから，C' を最下段まで拡張することにより，x を左下の cross とする box から始まり T 岸へ至る同符号の box からなる短冊 C が得られる。その後，先に符号を－に換えた box の符号を元に戻しても，短冊 C には影響しないから，C が求める短冊である。

Case２．$q < p - 1$。この場合は Case１．の証明において，B より左にある p 段目の＋の符号をもつすべての box の符号を－に換えるという操作をしない（したがって，符号を戻すこともない）他は全く同様にして求める短冊が得られる。

定理２．１　G において，$L-R$ valid path が存在するための必要十分条件は，同符号の box からなる $T-B$ 短冊が存在しないことである。

定理２．１の証明（必要性）同符号の box からなる $T-B$ 短冊 $\{B_1, \ldots, B_m\}$ があったと仮定する。このとき，どのような $L-R$ valid path も line segments

$$B_1 \cap B_2, B_2 \cap B_3, \ldots, B_{m-1} \cap B_m$$

のうちの少なくとも１本以上を含まなければならない。これは矛盾である。

（十分性）G に $L-R$ valid path が存在しないとする。G の valid な辺全体で生成されるグラフ H の成分の中で最も下にある cross のうち最も右にあるものを x とする。このとき，補題２．１により，x を左下の cross とする box から始まり T 岸へ至る同符号の box からなる短冊 C が存在する。このとき，x より，下にあるすべての box の符号は－であるから，C を拡張して B 岸に至る同符号の短冊を作ることができる。

3　アルゴリズム

前節にて，与えられた G が $L-R$ valid path を持つための必要十分条件を得た。この節では，実際に与えられた G の $L-R$ valid path を求めるアルゴリズムについて述べる。基本戦略は，L 岸上の各 cross から valid segment をバックトラック技法を用いて逐次たどっていくことである。

注意３．１　隣接する valid segment を次々にたどっていくことを考えるとき，cross に達するたびに，それが regular cross ならば進むべき valid segments は一意的に定まるが，bad cross ならば，一意的に定まらない。そのためアルゴリズム３．２で述べるような工夫が必要となる。

定義３．１　cross v が，T 岸，B 岸，L 岸，R 岸のいずれかにあることを示すために，それぞれ文字'T','B','L','R'を割り当てる。それ以外の cross には空白文字' 'を割り当てる。

定義３．２ cross v から R 岸への path を $v-R$ **path** という。

アルゴリズム３．１

Input : G

Output : G 内の $L-R$ valid path

FOR EACH v **IN**（cross **AND** L 岸）**DO**

vpath:= []; ＃空リスト

IF（v からの valid segment が存在する）**THEN**

vseg:= v から延びている valid segment ;

vnew:= *vseg* のもうひとつの端点；

PUSH (*vpath*, *vseg*);

IF（FINDPATH (*vnew*)） **THEN** ＃アルゴリズム３．２参照

RETURN *vpath*;

注意３．２ アルゴリズム３．１において，PUSH (*vpath*, *vseg*) 関数は，リスト *vpath* の先頭要素に *vseg* を挿入するリスト操作関数である。また，POP (*vpath*) 関数は，スタックリスト *vpath* から先頭要素を取り除くリスト操作関数である。

アルゴリズム３．２

Input : box に分割された長方形 R 内の cross v

Output : $v-R$ valid path があるならば，TRUE，そうでなければ FALSE

PROCEDURE FINDPATH（v）；

BEGIN

CASE v **OF**

'R'： **RETURN** TRUE ;

'X','L','T','B'： **RETURN** FALSE ;

' '： **CASE** v **OF**

regular cross :

v：='X'；

found : = FALSE ;

vseg:= v から延びている valid segment ;

PUSH (*vpath*, *vseg*);

vnew:= *vseg* のもうひとつの端点；

FINDPATH (*vnew*);

bad cross :

```
        v：='X'；
        found := FALSE;
        direction := left;
        WHILE (NOT found) AND (direction ≠ failed) DO
          CASE direction OF
            left :
                vseg:= v から左方向に延びている valid segment;
                direction := straight;
            straight :
                vseg:= v から進行方向に延びている valid segment;
                direction := right;
            right :
                vseg:= v から右方向に延びている valid segment;
                direction := failed ;
          PUSH (vpath, vseg);
          vnew:= vseg のもうひとつの端点；
          FINDPATH (vnew);
        IF (NOT found) THEN
          v：=''；
          POP (vpath);
        RETURN found
END
```

注意3．3　このアルゴリズムは再帰的アルゴリズムである。得られる path（*vpath* に保存）はそれまでたどった path の頂点には絶対に隣接しない。

例3．1　例1．1の *G* について，アルゴリズム3．1，3．2を適用したときの様子を図4に示す。

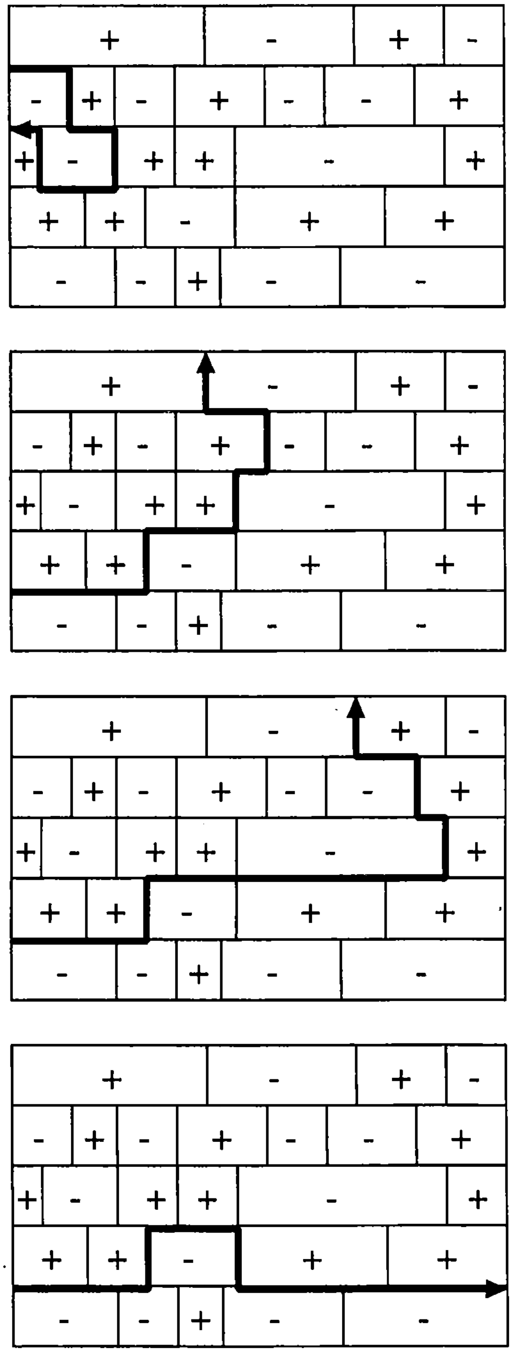

図4　アルゴリズム3．1の適用例

参考文献

1）V. Halava, T. Harju, L. Ilie. On a geometric problem of zigzags. Information Pro-cessing Letters. 62（1997）1－4.
2）J. R. Isbell. Epimorphisms and dominions. Proc. Conf. on Categorical Algebra, La Jolla. Springer（1966）232－246.

On a valid path in rectangle partitioned into horizontally aligned rectangle boxes

Shigekazu NAKAGAWA, Mamoru WATANABE

Dept. of Computer Science and Mathematics,

Kurashiki University of Science and the Arts,

2640 Nishinoura, Tsurajima-cho, Kurashiki-shi, Okayama 712, Japan

(Received September 30, 1997)

Let G be a rectangle partitioned into horizontally aligned rectangle boxes, where each box is assigned by a plus or by a minus. We give a necessary and sufficient condition for the existence of a simple path, connecting the frontiers of the given G and going between differently marked boxes. Moreover, we give an algorithm which finds the path. Both the proof and the algorithm remain valid for Halava's results including Isbell's zigzag theorem.